CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

Filiera tehnologică : profil tehnic

XI. OSZTÁLY

I.

a) Ha $a+b+1=0$ számítsuk ki $\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3})$.

b) Számítsuk ki $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

II. Azt mondjuk, hogy az A,B$\in M_2(\mathbb{R})$ mátrixok, rendelkeznek a $(*)$ tulajdonsággal ha A+B=A$\bullet$B.

a) Igazoljátok, hogy az A=$\begin{pmatrix} -4 & 17 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ és B==$\begin{pmatrix} -6 & -17 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ rendelkeznek a $(*)$ tulajdonsággal .

b) Mutassuk ki, hogy: ha az X,Y$\in M_2(\mathbb{R})$ mátrixok, rendelkeznek a $(*)$ tulajdonsággal, akkor $X\bullet Y=Y\bullet X$.

III. Adott az $M=\left\{A\in M_3(\mathbb{R}) \mid A=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\right\}$ halmaz és a B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ és

C = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$ mátrixok.

a) Mutassuk ki, hogy $A^n\in M$, $\forall A\in M$ és $\forall n\geq 1$

b) Mutassuk ki, hogy: ha $X\in M_3(\mathbb{R})$ és $B\bullet X=X\bullet B$ akkor $X\in M$.

c) Oldjuk meg az $X^3=C$ egyenletet.

IV. Adott az $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ függvény, amelyre teljesülnek az $f(x+y)=f(x)\cdot f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$ és $f(1)=e$ feltételek.

a) Számítsuk ki $f(3)$

b) Igazoljuk, hogy $f(x)=e^x, \forall x\in\mathbb{Z}$.

c) Azzal a feltétellel, hogy létezik $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$, határozzátok meg az l értékét.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7